***Metodologia di calcolo per pompe a ingranaggi esterni***

*Articolo pubblicato sulla rivista oleodinamica e pneumatica 03/2013*

*Gibellini Matteo*

In questo articolo verrà descritta la metodologia di calcolo per la progettazione delle pompe a ingranaggi esterni con dentatura ad evolvente sviluppato dall'autore per conto di Galtech S.p.A. con l'obiettivo di massimizzare il rapporto fra la cilindrata specifica e le dimensioni della pompa.

La cilindrata specifica media per unità di fascia di una pompa oleodinamica ad ingranaggi esterni con dentatura ad evolvente può essere scritta come:

$$Vcs = \frac{\pi}{2} \cdot \left( d_a^{\,2} - d'^2 - \frac{\pi^2 \cdot d_b^{\,2}}{3 \cdot Z^2} \right) \tag{1}$$

Essa risulta proporzionale alla somma algebrica di tre termini, i primi due legati alle dimensioni della pompa e l'ultimo funzione del diametro di base che come vedremo determina la forma dell'evolvente. Quest'ultimo termine presenta a denominatore il numero di denti al quadrato e pertanto la sua influenza sul valore finale della cilindrata specifica risulta trascurabile rispetto ai primi due. Pertanto possiamo considerare in prima approssimazione la cilindrata specifica proporzionale a:

$$d_a^{\,2} - d'^2 \tag{2}$$

L'obiettivo prefissato tuttavia non è solo quello di massimizzare la cilindrata specifica ma anche di contenere la dimensioni della pompa. L'ingombro della pompa è legato strettamente all'area occupata dagli ingranaggi ovvero all'area del rettangolo minimo ad essi circoscritto, la quale risulta essere pari a:

$$d_a \cdot (d' + d_a) \tag{3}$$

Come mostrato in Fig. 1 il diametro di testa dell'ingranaggio è legato all'interasse di lavoro dalla relazione:

$$d' = \frac{d_a}{2} + \frac{d_f}{2} + J_f \tag{4}$$

Il gioco di fondo deve essere mantenuto il minimo possibile, compatibilmente con le sicurezza che , a causa delle varie tolleranze, non venga mai a crearsi contatto fra la testa del dente e il fondo gola dell'ingranaggio opposto. In genere il "peso" del gioco di fondo sull'interasse di lavoro risulta dell'ordine dell'1%, pertanto possiamo trascurarlo e dal rapporto fra la (2) e la (3) si ottiene la funzione da massimizzare:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot \left( \frac{d_a}{d_f} \right)^2 - 2 \cdot \frac{d_a}{d_f} - 1}{3 \cdot \left( \frac{d_a}{d_f} \right)^2 + \frac{d_a}{d_f}} \tag{5}$$

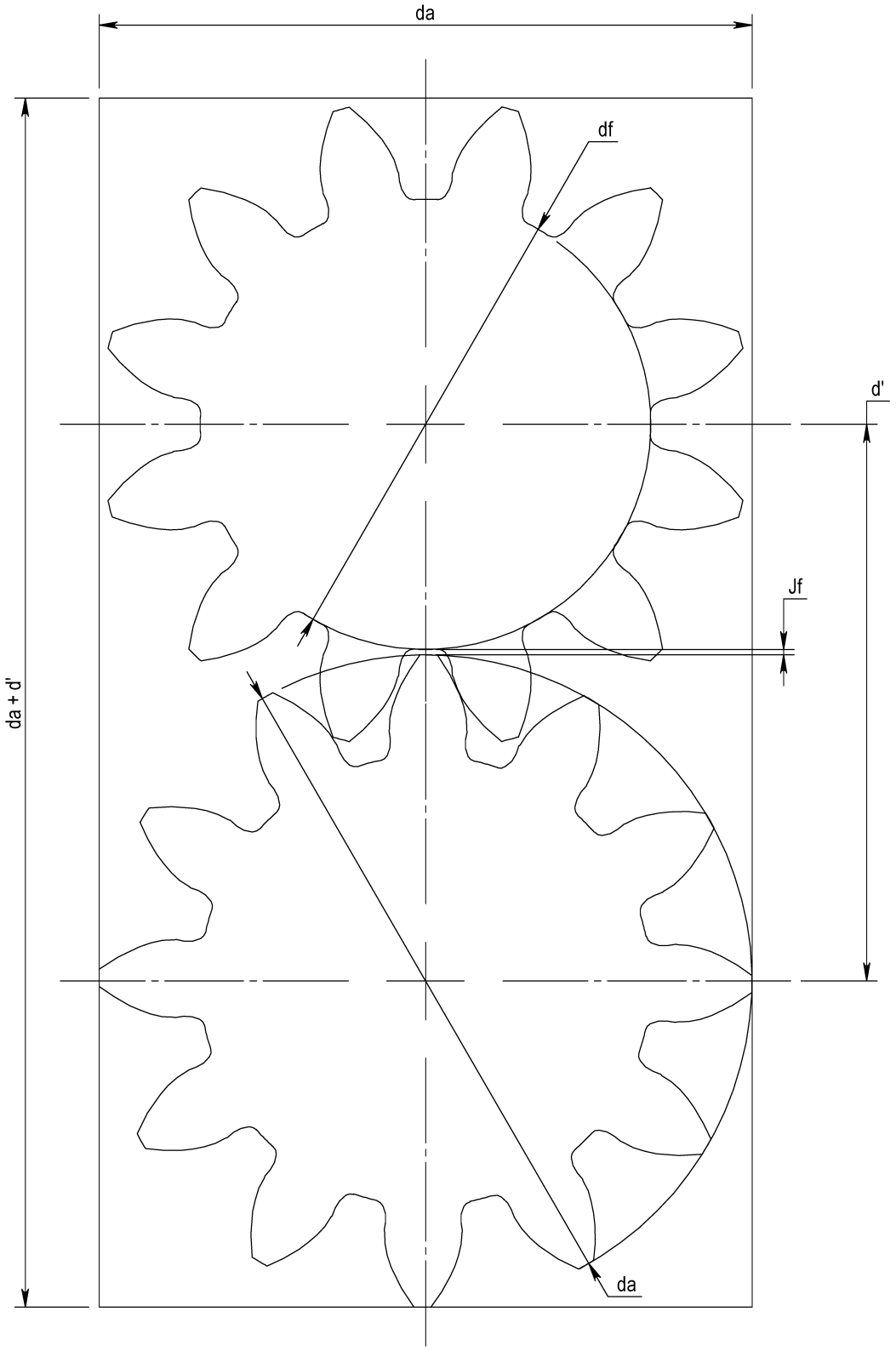



*Fig. 1: Ingranamento*

Quest'ultima è una curva monotona crescente funzione del solo rapporto fra il diametro esterno e il diametro di fondo dell'ingranaggio e presenta un asintoto pari a un mezzo. Per rapporti inferiori a due, valore "massimo" per le pompe a ingranaggi, otteniamo una relazione "quasi" lineare, da questo si può concludere che per massimizzare il rapporto fra cilindrata specifica e ingombro della pompa bisogna massimizzare il rapporto fra diametro esterno e diametro di fondo dell'ingranaggio.

Mentre l'aumento del diametro esterno dell'ingranaggio implica l'aumento dell'ingombro della pompa, la diminuzione del diametro di fondo è limitata dal diametro del perno che dipende dalle tipologie di alberi e flange richieste dalle specifiche di progetto. Una volta definiti i due diametri che rispettano le specifiche di progetto e fissato il numero di denti, è necessario determinare la forma del dente che permette di soddisfare le condizioni per un corretto funzionamento della pompa.

Tradizionalmente viene dato molto peso al modulo di taglio che è preso come parametro di riferimento sia nella fase di progettazione dell'ingranaggio che per i calcoli di verifica del corretto funzionamento. In realtà il modulo non è strettamente legato alla forma dell'evolvente; ad esempio le dentature mostrate in Fig.2 e Fig.3 sono ricavate da utensili dentiera con modulo e angolo di pressione diversi tuttavia avendo lo stesso diametro di base presentano la medesima forma delle evolventi differendo leggermente solo nella trocoide.

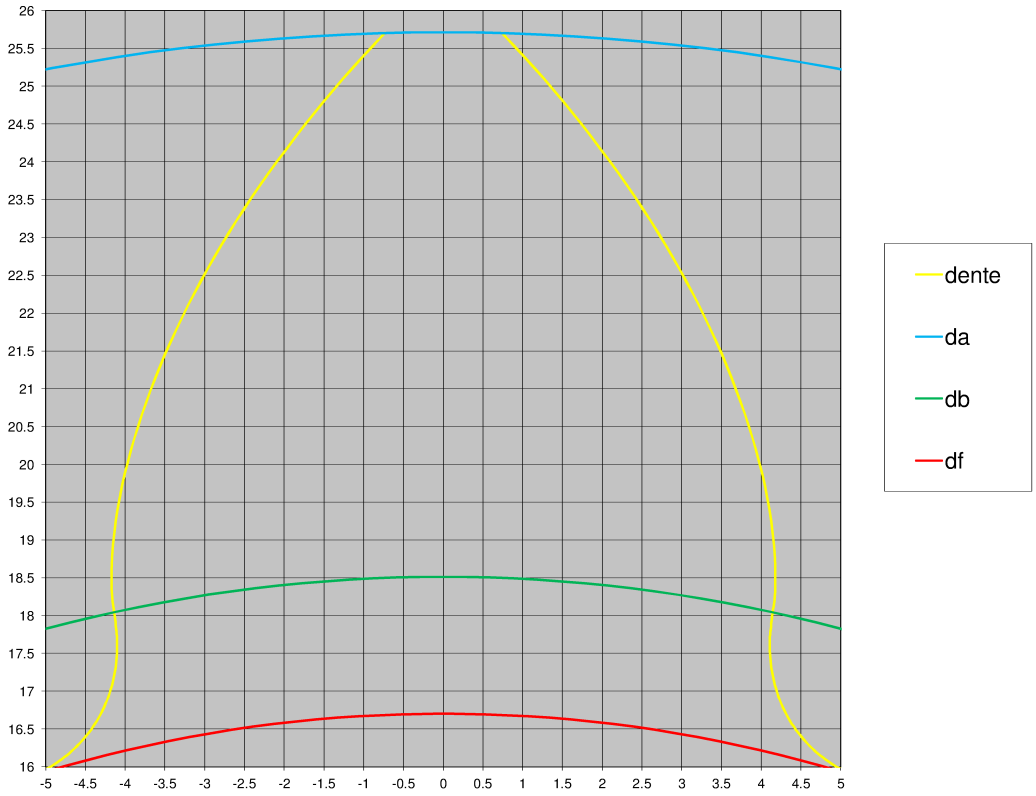



*Fig. 2: θ =20, m=4.378, Z=9*

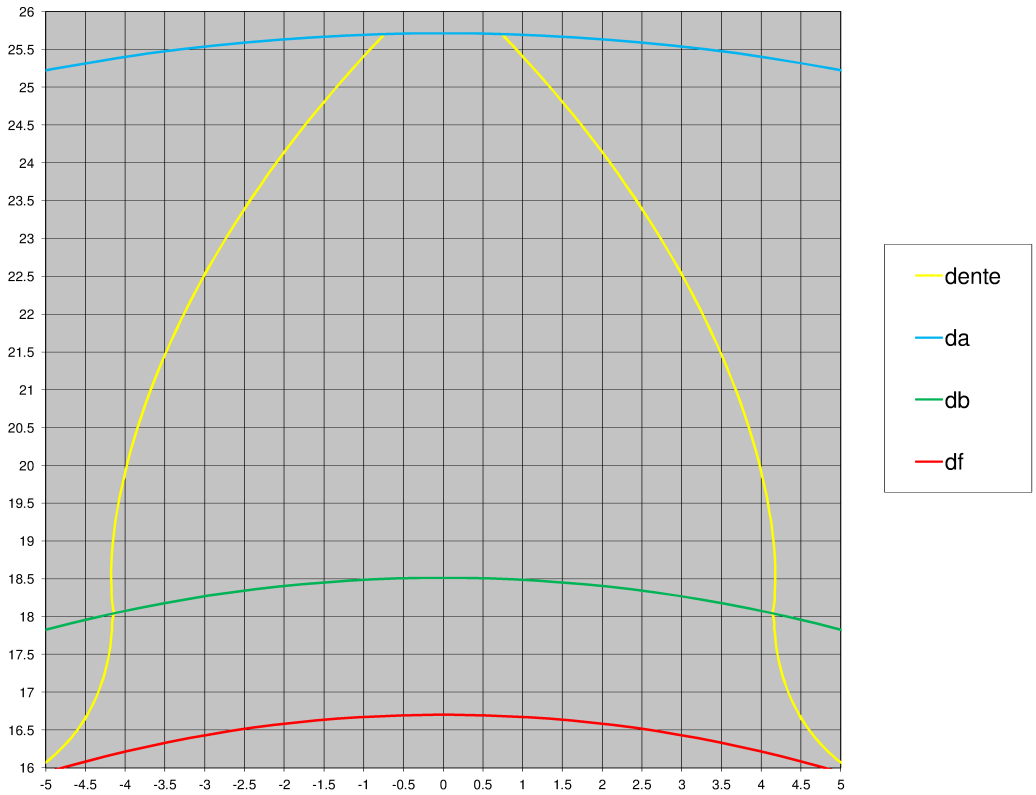



*Fig. 3: $\theta$ =30, m=4.75, Z=9*

# Vincoli per il corretto funzionamento

Di seguito indicheremo i vincoli necessari a rispettare le condizioni per un corretto funzionamento della pompa e da questi ricaveremo dei limiti sul diametro di base e dunque sulla forma dell'evolvente.

- **Gioco di fondo**

Come già visto il gioco di fondo deve essere il più piccolo possibile per minimizzare l'interasse di lavoro, il cui aumento influenzerebbe negativamente sia la cilindrata che le dimensioni della pompa. Una volta definito il gioco di fondo dalla (4) risulta determinato anche l'interasse di lavoro che coincide con il diametro primitivo di lavoro.

- **Rapporto di condotta**

Per assicurare la continuità del moto il rapporto di condotta deve essere sufficientemente superiore all'unità. Il rapporto di condotta può essere scritto come:

$$\varepsilon_0(d_b) = \frac{Z}{\pi} \cdot \left( \sqrt{\left(\frac{d_a}{d_b}\right)^2 - 1} - \sqrt{\left(\frac{d'}{d_b}\right)^2 - 1} \right) \tag{6}$$

Tale funzione e presenta un minimo per:

$$\sqrt{\frac{d_a^{\ 4} \cdot d'^2 - d'^4 \cdot d_a^{\ 2}}{d_a^{\ 4} - d'^4}} \tag{7}$$

Se dunque il valor minimo del rapporto di condotta risulta maggiore di uno allora è garantita la continuità del moto per qualunque valore del diametro di base altrimenti è necessario rivedere i valori del diametri esterno e di fondo in quanto la sua variazione con il diametro di base risulta molto limitata, ovvero il rapporto di condotta dipende "poco" dalla forma dell'evolvente.

- **Diametro di ultimo contatto**

Per assicurare che l'ingranamento avvenga sempre sull'evolvente è necessario rispettare una distanza minima fra il diametro di base e il diametro ove avviene l'ultimo contatto, detto anche diametro di TIF. Tale condizione può essere espressa tramite la relazione:

$$\frac{d_{TIF}}{d_b} >= K_{TIF} \tag{8}$$

ove $K_{TIF}$ è un valore opportuno, maggiore dell'unità, da determinare in base all'esperienza aziendale. La funzione:

$$\frac{d_{TIF}}{d_b}(d_b) = \sqrt{1 + \left( 2 \cdot \sqrt{\frac{d'^2}{d_b^{\ 2}} - 1} - \sqrt{\frac{d_a^{\ 2}}{d_b^{\ 2}} - 1} \right)^2} \tag{9}$$

presenta un minimo pari a uno in corrispondenza di:

$$\sqrt{\frac{4 \cdot d'^2 + d_a^{\ 2}}{3}} \tag{10}$$

Quindi esistono teoricamente due valori del diametro di base che soddisfano la condizione sul diametro di TIF, tuttavia è sempre meglio avere un diametro base vicino al diametro di fondo per non avere trocoidi troppo lunghe e strette. Pertanto possiamo definire un valore massimo del diametro di base come quel diametro che soddisfa la relazione indicata in (8) e risulta inferiore al valore ricavato dalla (10). Tale valore può essere calcolato numericamente tramite semplici algoritmi iterativi implementati su calcolatore e definisce il diametro di base che non si deve superare se si vuole essere sicuri che l'ingranamento avvenga sempre sull'evolvente.

- **Spessore del dente sul diametro esterno**

Per evitare il fenomeno del dente a punta e limitare i trafilamenti fra ingranaggio e corpo pompa è necessario definire uno spessore minimo sul diametro di testa. Tale condizione può essere scritta come:

$$\frac{S_a}{m_a} \geq K_a \tag{11}$$

Con $K_a$ valore opportuno da determinare in base all'esperienza aziendale.

- **Spessore del dente sul diametro primitivo di lavoro**

Nelle pompe a ingranaggi standard è necessario prevedere gioco fra i denti non a contatto per evitare aumenti di pressione durante la fase di scambio. Il vincolo può essere scritto imponendo un valore massimo allo spessore del dente sul diametro primitivo di lavoro che si traduce tramite la relazione:

$$\frac{S'}{m'} \leq K' \tag{12}$$

Con $K'$ costante opportuna da determinare in base all'esperienza.

Le due condizioni (11) e (12) sugli spessori sul diametro di testa e sul diametro primitivo di lavoro possono essere riassunte con:

$$\frac{S'}{m'} - \frac{S_a}{m_a} \leq K' - K_a \tag{13}$$

Che può essere riscritta in funzione del diametro di base come:

$$Z \cdot \left( inv\left( \arccos\left( \frac{d_b}{d_a} \right) \right) - inv\left( \arccos\left( \frac{d_b}{d'} \right) \right) \right) \leq K' - K_a \tag{14}$$

La (14) è una funzione monotona decrescente pertanto esiste un valore minimo del diametro di base, che può essere calcolato numericamente, al di sopra del quale si ottiene sufficiente spessore sul diametro di testa e contemporaneamente sufficiente gioco fra i denti non a contatto.

Dalle condizioni sopraindicate abbiamo ricavato due valori entro i quali il diametro di base deve rimanere in modo da soddisfare le condizioni per un corretto funzionamento della pompa.
A questo punto definito il diametro di base e supponendo il numero di denti fissato da progetto, è possibile scegliere arbitrariamente il modulo e l'angolo di pressione di taglio in base alle esigenze di realizzabilità dell'utensile creatore, a patto che venga rispettata la relazione:

$$m \cdot \cos(\theta) = \frac{d_b}{Z} \tag{15}$$

# Calcolo dell'area di spinta

Fissate le dimensioni dell'ingranaggio e la forma del dente, è necessario definire in modo corretto la posizione degli scarichi antirumore e le aree di spinta sui supporti di bilanciamento.
In collaborazione con l'Ing. Giandomenico Galaverni è stato realizzato un foglio di calcolo che permette di colcolare i vari paramentri della dentatura, generare la forma del dente e di esportare l'ingranaggio completo in ambiente CAD.
Tramite il CAD è possibile replicare l'ingranamento e valutare quantitativamente l'apertura di passaggio in posizione simmetrica e dunque definire in modo corretto la posizione degli scarichi antirumore presenti all'interno dei supporti di bilanciamento.

| Dente | | |
|---|---|---|
| Parametri di ingresso | | |
| Denominazione | Simbolo | Valore |
| Numero di denti | Z | 9 |
| Angolo di pressione nominale utensile | θ [°] | 20 |
| Modulo (diametro primitivo/numero denti) | m [mm] | 4.4 |
| Numero di denti per misurare la W | Zw | 2 |
| Willdhaber dopo taglio | W0 [mm] | 21.2 |
| Willdhaber dopo finitura | W [mm] | 21.1 |
| Interasse di lavoro | d' [mm] | 42 |
| Diametro di testa | da [mm] | 51 |
| Addendum creatore | hkw [mm] | 4.956 |
| Raggio di raccordo di testa dell'utensile | r [mm] | 1.6 |
| Parametri d'uscita | | |
| Denominazione | Simbolo | Valore |
| Angolo di pressione di lavoro | θ' [°] | 27.626 |
| Modulo di lavoro | m' [mm] | 4.667 |
| Diametro Primitivo | d [mm] | 39.600 |
| Diametro riferito all'ultimo contatto | dtif [mm] | 37.434 |
| Diametro di Base | db [mm] | 37.212 |
| Diametro di piede (o di fondo) | df [mm] | 33.063 |
| Spessore dente sul diametro di testa | Sa [mm] | 1.721 |
| Spessore dente sul diametro primitivo | S [mm] | 8.041 |
| Spessore dente sul diametro primitivo dopo taglio | S0 [mm] | 8.147 |
| Spessore dente sul diametro base | Sb [mm] | 8.111 |
| Altezza utile di dentatura | hu [mm] | 9.000 |
| Penetrazione utensile di taglio | h0 [mm] | 8.958 |
| Spostamento di dentatura di taglio | X0 [mm] | 1.698 |
| Gioco di base | Jb [mm] | -0.164 |
| Gioco radiale | Jr [mm] | -0.177 |
| Gioco di piede (o di fondo) | Jf [mm] | -0.042 |
| Rapporto di condotta | ε0 | 1.186 |
| Cilindrata specifica | Vcs1 [cm^3/(giri mm)] | 1.226 |
| Larghezza chiusura cave | t [mm] | 11.509 |

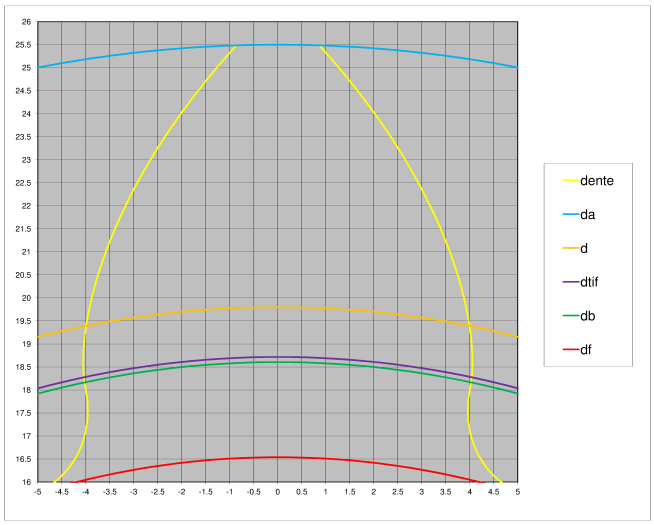



*Fig. 4: Foglio di calcolo*

Per il calcolo dell'area di spinta è necessario conoscere la distribuzione di pressione sulle pareti dell'ingranaggio note le pressioni di aspirazione e mandata. Tale calcolo richiede alcune ipotesi semplificative ovvero si considera un moto laminare del fluido fra la parete dell'ingranaggio e i supporti di bilanciamento, e un meato ad altezza costante. Sotto tali condizioni l'equazione di Reynolds, che governa il moto del fluido, si riduce alla più semplice equazione di Laplace ovvero

$$\nabla^2 P = 0 \tag{16}$$

Tale equazione è risolvibile, tramite programmi di calcolo agli elementi finiti, una volta che sia stata definita la geometria del problema e siano state imposte le condizioni al contorno.
Per risolvere la (16) si è utilizzato il programma freeware FEMM 4.2 di David Meeker che è nato per la risoluzione di problemi elettro-magnetici bidimensionali, tuttavia con i dovuti accorgimenti è possibile utilizzarlo anche nel caso in esame. Infatti i problemi elettrostatici sono governati dall'equazione:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{17}$$

la quale si riduce alla (16) imponendo una densità di carica pari a zero. Pertanto è possibile risolvere il problema del calcolo dell'area di spinta utilizzando un software per la risoluzione di problemi elettrostatici con l'accorgimento di considerare la distribuzione di tensione come se fosse la distribuzione di pressione.

Tramite gli strumenti forniti dal programma risulta relativamente semplice impostare la geometria del problema e definire le condizioni al contorno. Inoltre è presente un meshatore triangolare automatico che permette di infittire le aree di interesse.

Importante ai fini del risultato è la corretta definizione delle condizioni al contorno. Ove agisce la pressione di aspirazione viene imposto un valore pari a zero mentre dove agisce la pressione di mandata un valore pari a uno. Esistono vani, fra i denti degli ingranaggi, che in certe posizioni di ingranamento non sono connessi direttamente né alla aspirazione né alla mandata. In tali zone si è imposto un valore intermedio funzione della posizione dell'ingranaggio.

Avendo definito la geometria del problema e le condizioni al contorno, il software calcola per ogni triangolo della mesh un valore compreso fra zero e uno che viene preso come "peso" nel calcolo dell'area di bilanciamento. Il calcolo viene ripetuto in diverse posizioni di ingranamento per determinare la condizione di carico più sfavorevole.

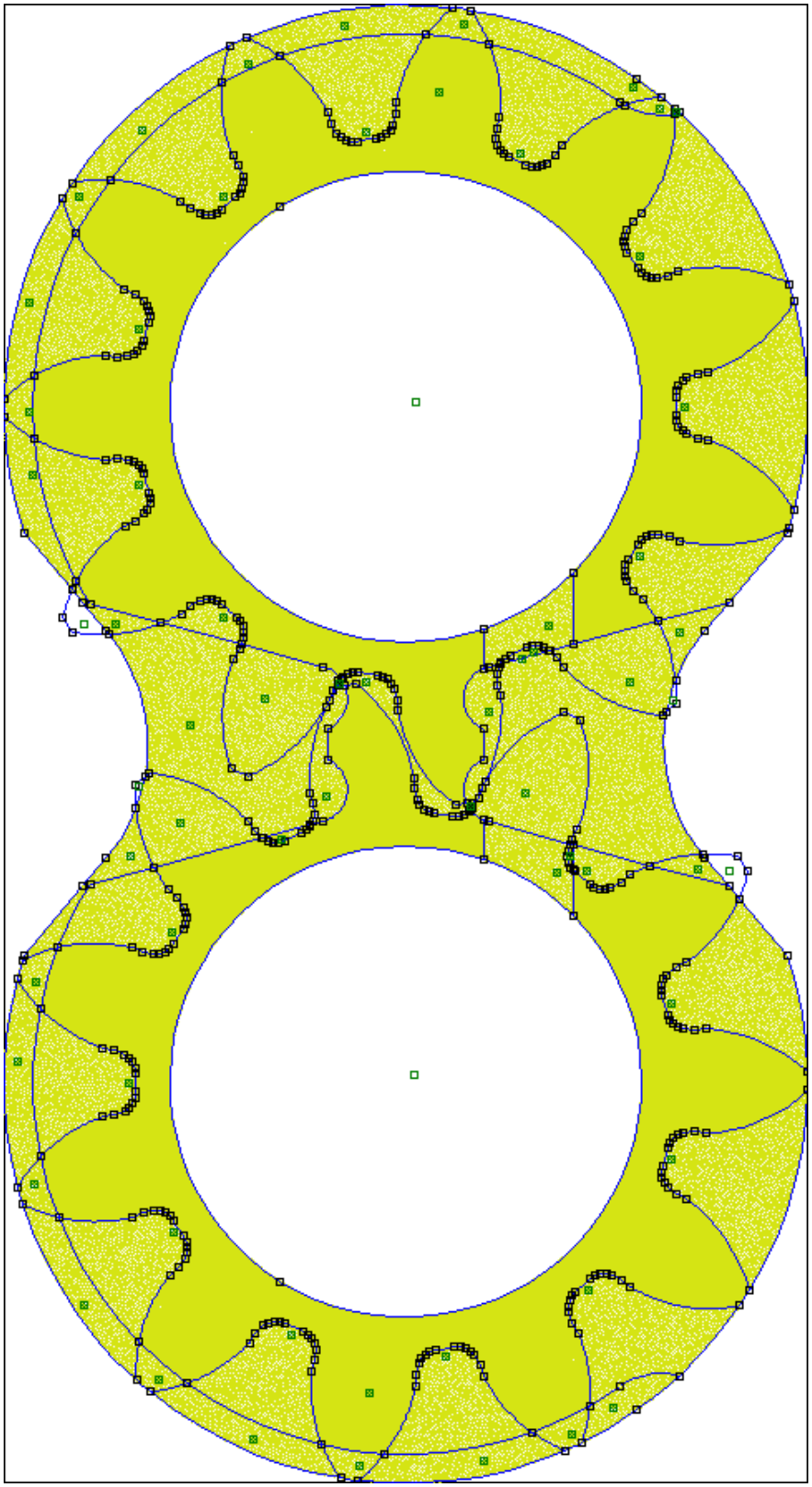


*Fig. 5: Mesh*

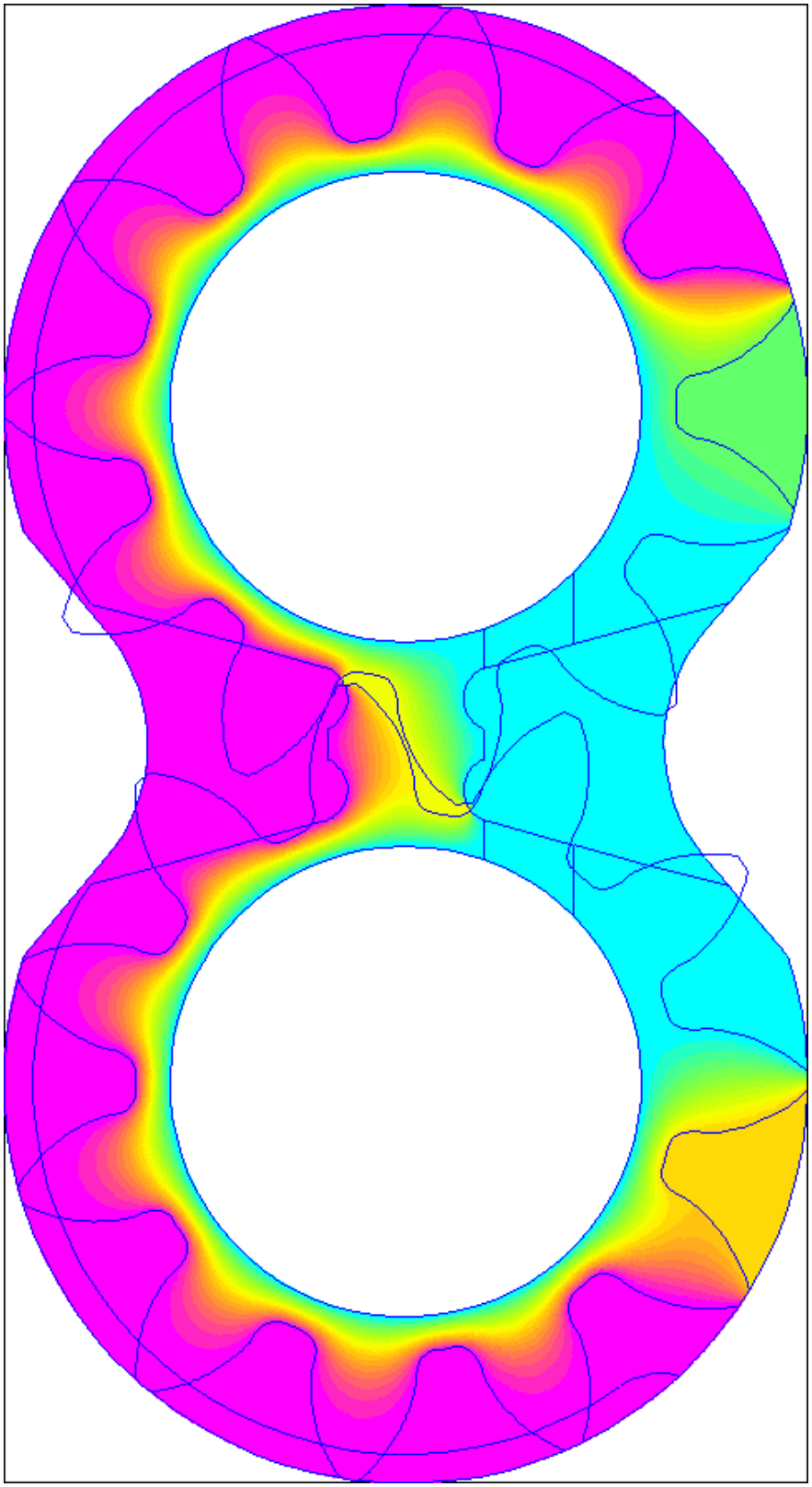
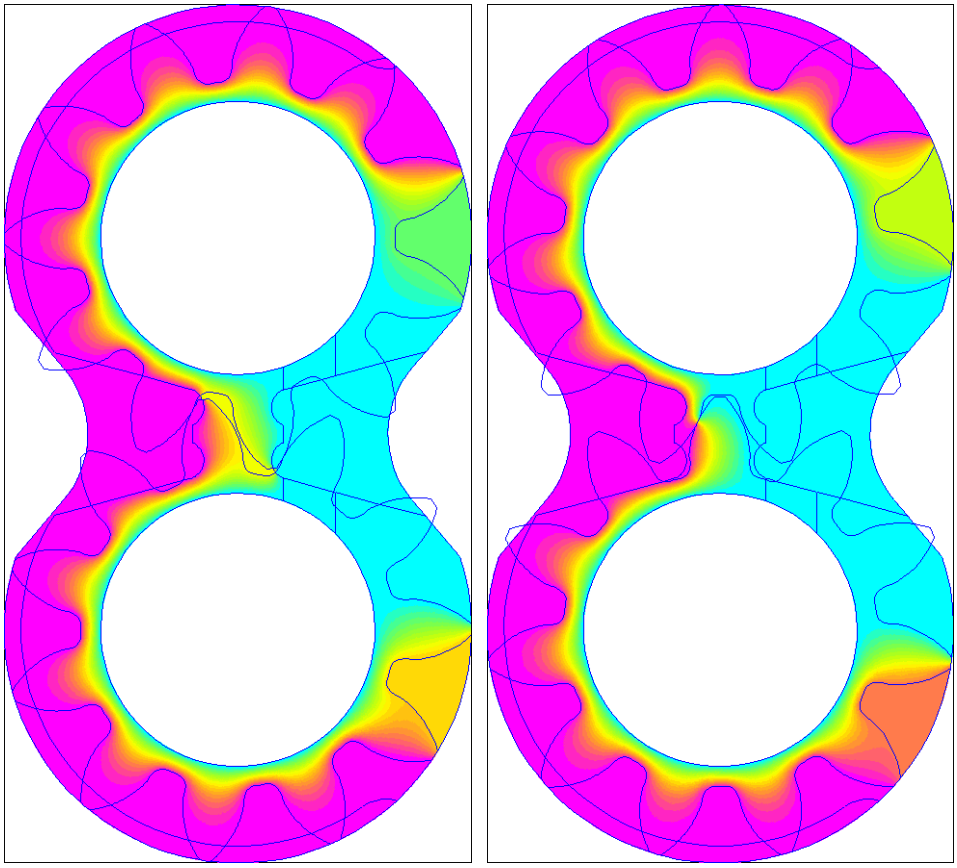


*Fig. 6: Risultato*



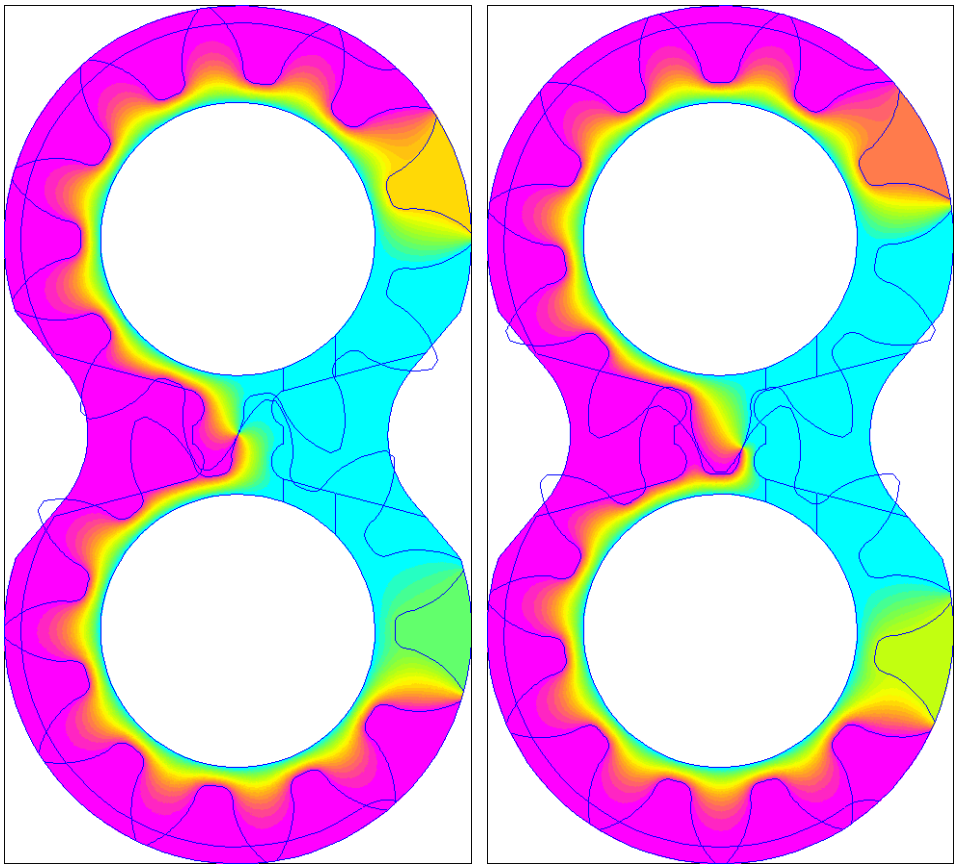


*Fig. 7: Posizioni di ingranamento diverse*

Per il calcolo dell'area di spinta il file dei risultati generato dal programma viene importato tramite uno script in Octave, software freeware per il calcolo numerico.
L'area di spinta è calcolata sommando le aree dei triangoli componenti la mesh ognuno moltiplicato per il "peso" risultante, inoltre viene calcolato anche il centro di spinta utilizzando le formule indicate:

$$A_s = \sum_T A_{ti} \cdot p_i \tag{18}$$

$$x_s = \frac{\sum_T A_{ti} \cdot p_i \cdot x_{ti}}{A_s} \tag{19}$$

$$y_s = \frac{\sum_T A_{ti} \cdot p_i \cdot y_{ti}}{A_s} \tag{20}$$

I risultati così ottenuti permettono di definire in modo corretto la geometria dell'area di bilanciamento da ricavare sui supporti.

# Conclusioni

In questo articolo si è descritta una metodologia di calcolo sviluppata dall'autore, che permette di unificare il progetto di pompe a ingranaggi esterni con dentatura ad evolvente di qualsiasi gruppo, con l'obiettivo di massimizzare il rapporto fra cilindrata specifica e dimensioni.
Gli strumenti di calcolo sopra descritti sono stati utilizzati per la progettazione della nuova pompa gruppo tre di Galtech S.p.A. sviluppata in collaborazione con l'Interpump Engineering S.r.l. e l'Ing. Giandomenico Galaverni.

# Nomenclatura

$Vcs$ : Cilindrata specifica media per unità di fascia
$d_a$ : Diametro esterno ingranaggio
$d'$ : Diametro primitivo di lavoro/interasse di lavoro
$d_b$ : Diametro di base
$Z$ : Numero di denti
$d_f$ : Diametro di fondo
$J_f$ : Gioco di fondo
$\varepsilon_0$ : Rapporto di condotta
$d_{TIF}$ : Diametro ove avviene l'ultimo contatto
$m$ : Modulo
$m'$ : Modulo di lavoro
$m_a$ : Modulo di testa
$S_a$ : Spessore del dente sul diametro di testa
$S'$ : Spessore del dente sul diametro primitivo di lavoro
$\theta$ : Angolo di pressione
$P$ : Pressione
$V$ : Tensione
$\rho$ : Densità di carica
$\varepsilon$ : Permettività dielettrica
$A_s$ : Area di spinta
$A_{ti}$ : Area dell'i-esimo triangolo
$p_i$ : Peso dell'i-esimo triangolo
$x_s$ : Coordinata x del centro di spinta
$x_{ti}$ : Coordinata x del centro dell'i-esimo triangolo
$y_s$ : Coordinata y del centro di spinta
$y_{ti}$ : Coordinata y del centro dell'i-esimo triangolo